Agrupamento de Escolas Diogo Cão

Nome : ____N.º ________Turma : ______

Data:____/____/____

Ficha Informativa - Matemática - 7º Ano

➢ Equações

O que são equações?

A sala de estar da Joana é retangular e tem 18 m^2 de área e 6 m de comprimento. Que largura tem a sala?

Neste problema há um valor desconhecido.

Se representarmos por uma letra o valor desconhecido, por exemplo a letra x, podemos traduzir o problema por uma igualdade utilizando a linguagem matemática.

$$6x = 18$$

A esta igualdade chama-se **equação**.
A letra x, que representa o valor desconhecido, chama-se **incógnita.**

Equação é uma igualdade entre duas expressões onde figura pelo menos uma letra (incógnita).

Elementos de uma equação:

EQUAÇÃO → $2x + 5 = 25$

O sinal de igual (=) separa duas expressões que se chamam **membros**. À esquerda do sinal (=) está o 1º membro da equação e à direta está o 2º membro da equação.

Cada membro é constituído por **termos**.

O 1º membro tem dois termos: $2x + 5$.

O 2º membro tem um termo: 25. Logo a equação tem três termos.

O termo $2x$ diz-se **termo com incógnita.**

Os outros termos, por não terem incógnita, dizem-se **termos sem incógnita ou termos independentes.**

O valor que colocado no lugar de x transforma a igualdade numa igualdade numérica verdadeira chama-se **solução ou raiz** da equação.

O **conjunto-solução** de uma equação é o conjunto das suas soluções.

A equação $x^2 = 9$ tem,em $\mathbb{Z}$, duas soluções, os números 3 e -3. O seu conjunto-solução é $\{-3; 3\}$.

O **domínio de uma equação** é o conjunto de valores a que pertence a incógnita.

Equações equivalentes:

Duas ou mais equações dizem-se **equivalentes** se têm o mesmo conjunto-solução.

Para indicar que duas equações são equivalentes utiliza-se o símbolo "⟺" entre elas.

Considera as seguintes equações:

$2x = 2$ e $x + 4 = 5$

$x = 1$ (A solução é 1) | $x = 1$ (A solução é 1)

Estas duas equações têm a mesma solução. São, por essa razão, equações equivalentes.

Escreve-se: $2x = 2 \Leftrightarrow x + 4 = 5$

Este símbolo lê-se: "é equivalente"

Exemplo de duas equações que não são equivalentes:

Dadas as equações $x = 3$ e $x^2 = 9$, em $\mathbb{Z}$, será que podemos dizer que são equações equivalentes?

A equação $x = 3$ tem uma solução, que é o número 3.

A equação $x^2 = 9$ tem duas soluções, que são os números 3 e -3.

Como -3 é solução da segunda equação mas não é solução da primeira equação, as equações **não são equivalentes.**

Equação como uma expressão da forma $f(x) = g(x)$

Se considerarmos as funções f e g, de domínio $\mathbb{Q}$ e conjunto de chegada $\mathbb{Q}$, tais que $f(x) = 2x + 2$ e $g(x) = x + 5$, a equação $2x + 2 = x + 5$ resulta da expressão $f(x) = g(x)$

$$\underbrace{2x + 2}_{f(x)} = \underbrace{x + 5}_{g(x)}$$

$f(x)$ é o 1º membro e $g(x)$ é o 2º membro da equação.

Como $f(3) = g(3)$ diz-se que 3 é a solução da equação.

Equação numérica:

A equação $f(x) = g(x)$ diz-se numérica quando as funções f e g são numéricas (funções cujo conjunto de chegada é um conjunto de números).

Equação linear com uma incógnita:

Designa-se por equação linear com uma incógnita (ou apenas equação linear) qualquer equação $f(x) = g(x)$, tal que f e g são funções afins.

Exemplo: $-x + 2 = -\frac{1}{2}x$

Nota: Não esquecer que as funções lineares e as funções constantes são casos particulares das funções afins e portanto também são funções afins.

Toda a equação linear é equivalente a uma equação em que o primeiro membro é dado por uma função linear e o segundo membro é constante, ou seja, **a uma equação do tipo $ax = b$**.

Exemplo: $2x + 4 = 24 \Leftrightarrow 2x = 20$

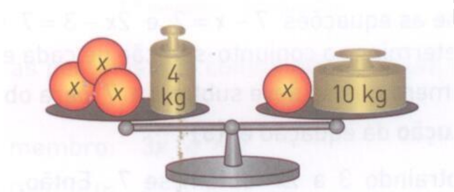
Resolução de equações:

Vamos considerar, em $\mathbb{Q}_0^+$, a equação $3x + 4 = x + 10$.

Resolver a equação é encontrar o valor de x (incógnita), em $\mathbb{Q}_0^+$, que transforme a equação numa igualdade numérica verdadeira.

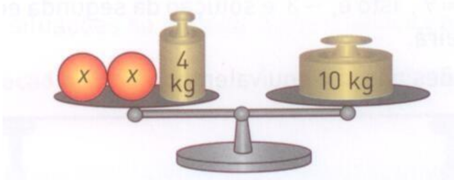
Vamos considerar a equação como uma balança em equilíbrio.

$$3x + 4 = x + 10$$



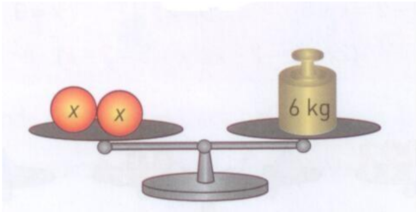
Se retirarmos a ambos os pratos da balança x, esta permanece em equilíbrio.

$$3x + 4 - x = x + 10 - x \Leftrightarrow 2x + 4 = 10$$



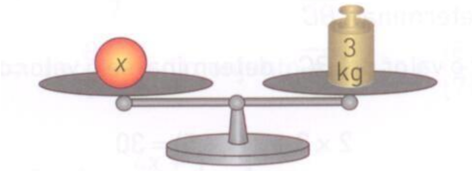
Vamos, agora, retirar a cada prato da balança 4 Kg.

$$2x + 4 {\color{red}- 4} = 10 {\color{red}- 4} \Leftrightarrow 2x = 6$$



Se dividirmos por 2 (ou multiplicarmos por $\frac{1}{2}$) cada prato da balança, obtemos:

$$\frac{2x}{\color{red}2} = \frac{6}{\color{red}2} \Leftrightarrow x = 3$$



A solução da equação é 3 e escreve-se: conjunto-solução$= \{3\}$.

Princípios de equivalência:

- **Princípio de equivalência da adição:**
  Se numa equação se adicionar ou subtrair um mesmo número a ambos os membros da equação, obtém-se uma equação equivalente à primeira.

  Regra prática: Numa equação pode-se passar qualquer termo de um membro para o outro, desde que lhe troquemos o sinal.

  $\boxed{o\ termo\ -5\ passou\ para\ o\ 2^{º}\ membro\ e\ trocou\ de\ sinal}$

  Exemplo: $$5x - 5 = 4x + 2 \Leftrightarrow 5x - 4x = 2 + 5$$

  $\boxed{o\ termo\ 4x\ passou\ para\ o\ 1^{º}\ membro\ e\ trocou\ de\ sinal}$

- **Princípio de equivalência da multiplicação:**
  Numa equação, se ambos os membros forem multiplicados ou divididos por um mesmo número diferente de zero, obtém-se uma equação equivalente à primeira.

  Exemplo: $$-3x = 4 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} = \frac{4}{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$$

Nota: Quando nada é referido relativamente ao domínio da equação, considera-se a equação definida em $\mathbb{Q}$.

Regras práticas para resolver equações:

1º Desembaraçar de parênteses;

2º Passar para um dos membros (normalmente para o 1º membro) os termos com incógnita e para o outro membro os termos sem incógnita;

3º Simplificar ambos os membros da equação (reduzir os termos semelhantes);

4ª Isolar a incógnita;

5º Indicar o conjunto-solução.

Classificação de equações:

Equação impossível:

$4x = 4x - 3 \Leftrightarrow 4x - 4x = -3 \Leftrightarrow 0x = -3$

Substituindo x por qualquer número obtém-se sempre $0 = -3$ (afirmação falsa), o que significa que a equação não tem soluções. A equação diz-se impossível e o seu conjunto-solução é um conjunto vazio.

Conclusão: Uma equação do tipo $\boldsymbol{ax = b}$**, com** $\boldsymbol{a}$ **e** $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}$**, é impossível quando** $\boldsymbol{a = 0}$ **e** $\boldsymbol{b \neq 0}$**.**

Equação possível indeterminada:

$5x - 3 = 5x - 3 \Leftrightarrow 5x - 5x = -3 + 3 \Leftrightarrow 0x = 0$

Qualquer que seja o valor que se atribua a x obtém-se a igualdade $0 = 0$, o que permite concluir que qualquer número racional é solução. A equação diz-se possível indeterminada e o seu conjunto-solução é $\mathbb{Q}$.

Conclusão: Uma equação do tipo $\boldsymbol{ax = b}$**, com** $\boldsymbol{a}$ **e** $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}$**, é possível indeterminada quando** $\boldsymbol{a = 0}$ **e** $\boldsymbol{b = 0}$**.**

Equação possível determinada:

$$10x = 4x - 12 \Leftrightarrow 10x - 4x = -12 \Leftrightarrow 6x = -12 \Leftrightarrow \frac{6x}{6} = \frac{-12}{6} \Leftrightarrow x = -2$$

Nesta equação o valor de x é único e igual a -2. A equação diz-se possível determinada e o seu conjunto-solução é $\{-2\}$.Conclusão: Uma equação do tipo $\boldsymbol{ax = b}$**, com** $\boldsymbol{a}$ **e** $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}$**, é possível determinada quando** $\boldsymbol{a \neq 0}$**. A única solução desta equação é** $\boldsymbol{\frac{b}{a}}$**.**

Equação algébrica de 1º grau:

Toda a **equação linear determinada** designa-se por **equação algébrica de 1º grau**.

A **solução de uma equação algébrica de 1º grau** pode ser apresentada na forma de **fração irredutível** ou **numeral misto** ou **na forma de dízima com uma dada aproximação.**

Resolução de uma equação com parênteses e denominadores:

Resolve, em $\mathbb{Q}$, a equação $3\left(x-\frac{1}{2}\right)=6x-\left(\frac{5}{3}+x\right).$ $\Leftrightarrow$

$$3\left(x-\frac{1}{2}\right)=6x-\left(\frac{5}{3}+x\right).$$

Desembaraçar de parênteses.

$$\Leftrightarrow 3x-\frac{3}{2}=6x-\frac{5}{3}-x$$

Colocar os termos com incógnita num membro e os termos sem incógnita no outro, trocando – lhes o sinal.

$$\Leftrightarrow 3x-6x+x=\frac{3}{2}-\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow 4x-6x=\frac{9}{6}-\frac{10}{6}$$

Reduzir os termos semelhantes.

$$\Leftrightarrow -2x=-\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{12}{6}x=-\frac{1}{6}$$

Multiplicar ambos os membros da equação pelo denominador comum (6) para eliminar os denominadores.

$$\Leftrightarrow -12x=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-12}{-12}x=\frac{-1}{-12}$$

Dividir ambos os membros da equação pelo coeficiente da incógnita (-12) para isolar o x.

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{12}$$

É uma equação possível determinada e o conjunto-solução é $\left\{\frac{1}{12}\right\}$.